УДК 514.75

О. М. Омельян

КРИВИЗНА 2-ГО ТИПА, ИНДУЦИРОВАННАЯ НА РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПЛОСКОСТЕЙ

В многомерном проективном пространстве рассмотрено распределение плоскостей. Построена кривизна групповой связности 2-го типа, индуцированной композиционным оснащением распределения плоскостей. Доказано, что неподвижность пары плоскости Картана и гиперплоскости Бортолотти в случае голономного распределения влечет обращение в нуль тензора кривизны 2-го типа.

In many-dimensional projective space the plane distribution is considered. The curvature of group connection of 2-nd type, induced by composite clothing of plane distribution, is constructed. It is proved, that a immovability of Cartan's plane and Bortolotti's hyperplane in case of holonomic distribution attracts the vanishing of curvature tensor of 2-nd type.

Ключевые слова: проективное пространство, распределение плоскостей, групповая связность, тензор кривизны, композиционное оснащение.

Key words: projective space, plane distribution, group connection, curvature tensor, composite clothing.

В работе индексы принимают следующие значения:

$$I,\ldots=\overline{1,n};\ \ i,\ldots=\overline{1,m};\ \ a,\ldots=\overline{m+1,n}.$$

1. В n-мерном проективном пространстве P_n будем рассматривать распределения NS_n [1; 2] m-мерных центрированных плоскостей P_m^*, которое определяется уравнениями $\omega_i^a=\Lambda_{iJ}^a\omega^J$, причем компоненты фундаментального объекта 1-го порядка распределения удовлетворяют следующим дифференциальным сравнениям по модулю базисных форм ω^I:

$$\Delta\Lambda_{iJ}^a-\delta_J^a\omega_i\equiv 0;\ \ \Delta\Lambda_{iJ}^a=d\Lambda_{iJ}^a-\Lambda_{jJ}^a\omega_i^j-\Lambda_{iK}^a\omega_J^K+\Lambda_{iJ}^b\omega_b^a,$$

где δ_J^a — обобщенный символ Кронекера.

Ранее было произведено [3; 4] композиционное оснащение распределения NS_n, состоящее в задании на нем аналогов плоскостей Картана и нормалей 2-го рода Нордена, а именно:

$$C_{n-m-1}:\ P_m^*\oplus C_{n-m-1}=P_n,\ N_{m-1}:\ A\oplus N_{m-1}=P_m^*,$$

причем оснащающие плоскости определены совокупностями точек

$$B_a=A_a+\lambda_a^i A_i+\lambda_a A,\ B_i=A_i+\lambda_i A.$$

Объект $\lambda=\{\lambda_a^i,\lambda_a,\lambda_i\}$ является оснащающим квазитензором, содержащим 3 подквазитензора λ_a^i, $\{\lambda_a^i,\ \lambda_a\}$ и λ_i. Выражения для дифференциалов точек B_a и B_i имеют вид

$$dB_a=(\ldots)_a^b B_b+t_{aJ}^i\omega^J B_i+(t_{aI}-\lambda_i t_{aI}^i)\,\omega^I A,\ \ dB_i=(\ldots)_i^j B_j+(\ldots)_i^a B_a+t_{iJ}\omega^J A,$$

где компоненты тензора $t=\{t_{aJ}^i,t_{aI},t_{iJ}\}$ неспециальных смещений [3] являются функциями от фундаментального объекта 1-го порядка $\Lambda^1=\{\Lambda_{iJ}^a\}$ распределения NS_n, оснащающего квазитензора λ и совокупности его пфаффовых производных $\lambda'=\{\lambda_{aJ}^i,\lambda_{aI},\lambda_{iJ}\}$, т. е. $t=t(\Lambda^1,\lambda,\lambda')$. Тензор t содержит ряд простейших, простых и составных подтензоров, причем равенство нулю тензора t геометрически означает неподвижность пары плоскостей (C_{n-m-1},P_{n-1}), где P_{n-1} представляет собой гиперплоскость Бортолотти, натянутую на плоскость Картана C_{n-m-1} и нормаль 2-го рода N_{m-1}.

2. С распределением NS_n ассоциируется главное расслоение [2] $G(U_n)$, базой которого является область U_n проективного пространства P_n, описанная центрами плоскостей P_m^*, а типовым слоем — подгруппа стационарности G центрированной плоскости P_m^*. В этом расслоении приемом Ю. Г. Лумисте [4] задана групповая связность с помощью формы $\tilde\omega=\omega-\Gamma_K\omega^K$, причем $\tilde\omega=\{\tilde\omega_j^i,\ \tilde\omega_i,\ \tilde\omega_b^a,\tilde\omega_a^i,\tilde\omega_a\}$. Компоненты объекта связности $\Gamma=\{\Gamma_{jk}^i,\Gamma_{ja}^i,\Gamma_{ij},\Gamma_{ia},\Gamma_{bi}^a,\Gamma_{bc}^a,\Gamma_{aj}^i,\Gamma_{ab}^i,\Gamma_{ai},\Gamma_{ab}\}$, удовлетворяют дифференциальным уравнениям [2], в частности,

$$\Delta\Gamma_{jk}^i+\omega_{jk}^i=\Gamma_{jkI}^i\omega^I,\ \ \Delta\Gamma_{ja}^i-\Gamma_{jk}^i\omega_a^k+\omega_{ja}^i=\Gamma_{jaI}^i\omega^I,\ \ldots \tag{1}$$

Объект групповой связности Г содержит ряд подобъектов [2]. Компоненты объекта кривизны $R=\{R^i_{jkl}, R^i_{jka}, R^i_{jab}, ...\}$ групповой связности Г выражаются [2] через компоненты объекта Г, их пфаффовы производные и компоненты фундаментального квазитензора Λ^1, например,

$$R^i_{jkl}=\Gamma^i_{j[kl]}-\Gamma^i_{ja}\Lambda^a_{[kl]}-\Gamma^s_{j[k}\Gamma^i_{sl]},\ R^i_{jab}=\Gamma^i_{j[ab]}-\Gamma^k_{j[a}\Gamma^i_{kb]},$$
$$R^i_{jka}=\frac{1}{2}(\Gamma^i_{jka}-\Gamma^i_{jak}-\Gamma^i_{jb}\Lambda^b_{ka})-\Gamma^l_{j[k}\Gamma^i_{la]}, \tag{2}$$

причем альтернирование производится по крайним индексам в квадратных скобках, поэтому $R^i_{j(kl)}=0,\ R^i_{j(ab)}=0.$ Объект кривизны R связности Г является тензором и содержит ряд подтензоров, соответствующих подобъектам объекта связности Г.

3. В работе [3] было доказано, что распределение NS_n и его композиционное оснащение индуцируют в расслоении $G(\mathrm{NS}_n)$ групповую связность 2-го типа $\overset{02}{\Gamma}=\{\overset{0}{\Gamma}{}^i_{jK}, \overset{02}{\Gamma}_{iJ}, \overset{0}{\Gamma}{}^a_{bI}, \overset{02}{\Gamma}{}^i_{aJ}, \overset{02}{\Gamma}_{aI}\}$, с компонентами, определяемыми, в частности, по формулам

$$\overset{0}{\Gamma}{}^i_{jk}=\Lambda^a_{jk}\lambda^i_a-\delta^i_j\lambda_k-\delta^i_k\lambda_j,\ \overset{02}{\Gamma}_{ij}=\lambda_{ij}+\Lambda^a_{ij}\lambda^k_a\lambda_k-2\lambda_i\lambda_j,$$
$$\overset{02}{\Gamma}_{ai}=\lambda_{ai}-\lambda_{ji}\lambda^j_a-\Lambda^b_{ji}\lambda^j_a(\lambda_b+\lambda^k_b\lambda_k)+2\lambda_i\lambda^j_a\lambda_j-\lambda_a\lambda_i. \tag{3}$$

Построим кривизну, порожденную групповой связностью 2-го типа, то есть получим охваты компонент тензора кривизны $\overset{02}{R}$ объектом групповой связности $\overset{02}{\Gamma}$. Из выражений (2), определяющих компоненты тензора кривизны R, видно, что для этого сначала нужно найти охваты пфаффовых производных объекта Г. Используя дифференциальные уравнения (1), выражения (3) и им аналогичные для компонент объекта связности $\overset{02}{\Gamma}$, найдем, что его пфаффовы производные охватываются следующим образом:

$$\overset{02}{\Gamma}_{ijk}=(\Lambda^a_{ijk}+\Lambda^a_{ib}\Lambda^b_{jk})\lambda^l_a\lambda_l+\lambda_{ijk}+\Lambda^a_{ij}(\lambda^l_{ak}\lambda_l+\lambda^l_a\lambda_{lk})-2\lambda_{ik}\lambda_j-2\lambda_i\lambda_{jk},$$
$$\overset{02}{\Gamma}_{ija}=(\Lambda^b_{ija}+\Lambda^b_{ic}\Lambda^c_{ja})\lambda^k_b\lambda_k+\lambda_{ija}+\Lambda^b_{ij}(\lambda^k_{ba}\lambda_k+\lambda^k_b\lambda_{ka})-2\lambda_{ia}\lambda_j-2\lambda_i\lambda_{ja}, \tag{4}$$
$$\overset{02}{\Gamma}_{iab}=\Lambda^c_{iab}\lambda^j_c\lambda_j+\lambda_{iab}+\Lambda^c_{ia}(\lambda_j\lambda^j_{cb}+\lambda^j_c\lambda_{jb})-\lambda_a\lambda_{ib}-\lambda_i\lambda_{ab}+2(\lambda_j\lambda^j_a\lambda_{ib}+$$
$$+\lambda_i\lambda^j_a\lambda_{jb}+\lambda_i\lambda_j\lambda^j_{ab}),...$$

Возвращаясь к формулам (2), определяющим тензор кривизны R, видим, что для получения выражений охватов компонент тензора $\overset{02}{R}$ необходимо: 1) найти альтернации соответствующих пфаффовых производных (4), учитывая симметрии компонент Λ^a_{iJK} фундаментального объекта 2-го порядка $\Lambda^2=\{\Lambda^1, \Lambda^a_{iJK}\}$ и пфаффовы производные 2-го порядка $\lambda_{iJK}, \lambda^i_{aJK}, \lambda_{aIJ}$ компонент квазитензора λ распределения NS_n по двум последним индексам; 2) вычислить свертки соответствующих компонент объекта $\overset{02}{\Gamma}$ и Λ^1, а также найти альтернированные свертки соответствующих компонент объекта связности $\overset{02}{\Gamma}$. Таким образом, выражения охватов для компонент тензора кривизны $\overset{02}{R}$ имеют следующий вид:

$$\overset{02}{R}_{ijk} = \overset{0}{R}{}^{l}_{ijk}\lambda_l - \Lambda^a_{[jk]}\lambda_{ia}, \quad \overset{02}{R}_{iab} = \overset{0}{R}{}^{j}_{iab}\lambda_j, \quad \overset{02}{R}{}^{i}_{ajk} = \overset{0}{R}{}^{b}_{ajk}\lambda^i_b - \overset{0}{R}{}^{i}_{ljk}\lambda^l_a - \Lambda^b_{[jk]}\lambda^i_{ab},$$

$$\overset{02}{R}{}^{i}_{abc} = \overset{0}{R}{}^{d}_{abc}\lambda^i_d - \overset{0}{R}{}^{i}_{jbc}\lambda^j_a, \quad \overset{02}{R}_{aij} = \overset{0}{R}{}^{b}_{aij}\lambda_b - \overset{0}{R}{}^{l}_{kij}\lambda^k_a\lambda_l - \Lambda^b_{[ij]}(\lambda_{ab} - \lambda_{kb}\lambda^k_a), \qquad (5)$$

$$\overset{02}{R}_{abc} = \overset{0}{R}{}^{d}_{abc}\lambda_d - \overset{0}{R}{}^{j}_{ibc}\lambda^i_a\lambda_j, \ldots$$

Выражения охватов для остальных компонент тензора кривизны определяются по формулам, аналогичным (5), но имеют более громоздкий вид. Итак, мы построили кривизну 2-го типа $\overset{02}{R}$, индуцированную композиционным оснащением распределения NS_n.

Замечание 1. Из формул (5) видно, что в выражения охватов компонент тензора кривизны 2-го типа $\overset{02}{R}$ входят компоненты тензоров кривизны индуцированных линейных связностей, охваты которых были найдены в работе [5].

Теорема 1. *В случае голономного распределения ($\Lambda^a_{[ij]} = 0$) при равенстве нулю тензоров кривизны индуцированных плоскостной $\overset{0}{R}{}^{i}_{jKL}$ и нормальной $\overset{0}{R}{}^{a}_{bIJ}$ линейных связностей тензор кривизны 2-го типа $\overset{02}{R}$ обращается в нуль.*

Замечание 2. Охваты компонент тензоров кривизны индуцированных линейных связностей представляют собой функции компонент тензора неспециальных смещений t, оснащающего квазитензора λ и фундаментального объекта Λ 1-го порядка распределения NS_n.

Теорема 1 равносильна следующему утверждению:

Теорема 2. *Неподвижность плоскости Картана и гиперплоскости Бортолотти (t = 0) в случае голономного распределения влечет обращение в нуль тензора кривизны 2-го типа $\overset{02}{R} = 0$.*

Замечание 3. В работе [6] введены обобщенные тождества Риччи для компонент объекта кривизны $\{\overset{0}{R}{}^{i}_{jkl}, \overset{02}{R}_{ijk}\}$ центропроективной подсвязности $\{\overset{0}{\Gamma}{}^{i}_{jk}, \overset{02}{\Gamma}_{ij}\}$ и показано, что они выполняются лишь в случае голономного распределения.

Список литературы

1. *Лаптев Г. Ф., Остиану Н. М.* Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности I // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. М., 1971. Т. 3. С. 49—94.

2. *Омельян О. М.* Нетензорность объекта кривизны групповой связности на распределении плоскостей // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2002. № 33. С. 74—78.

3. *Омельян О. М.* Четыре индуцированных связности на распределении плоскостей : междунар. конф. по геом. и анализу. Пенза, 2003. С. 63—69.

4. *Омельян О. М.* Пучки связностей 1-го и 2-го типов, индуцированные композиционным оснащением распределения плоскостей // Движения в обобщенных пространствах. Пенза, 2005. С. 94—101.

5. *Омельян О. М.* О кривизне 1-го типа, индуцированной на распределении плоскостей в проективном пространстве // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2008. Вып. 39. С. 110—116.

6. *Омельян О. М.* О тождествах Риччи для центропроективной кривизны 2-го типа на распределении : тезисы докл. междунар. конф. «Геометрия в Одессе — 2009». Одесса, 2009. С. 63.

Об авторе

Ольга Михайловна Омельян — ст. преп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: olga_omelyan2002@mail.ru

About the author

Olga Omelyan — high instructor, I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: olga_omelyan2002@mail.ru